

Armin Rohnen

# Formelsammlung Signalanalyse

September 9, 2019

Hochschule München FK03  
Labor für Maschinendynamik



## **0.1 Vorwort**

Um einen schnellen Überblick in der Signalanalyse zu erhalten und um schnell mal eine Formel bzw. einen Rechenweg zu finden, ist diese Formelsammlung entstanden. Sie erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, wird aber kontinuierlich gepflegt und kann über die Webseite [Schwingungsanalyse.com](http://Schwingungsanalyse.com) in der jeweils aktuellen Form bezogen werden.

Planegg, September 2019

*Armin Rohnen*



# Inhaltsverzeichnis

0.1	Vorwort .....	v
<b>1</b>	<b>Signalanalyse im Zeitbereich .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Signalanalyse im Frequenzbereich .....</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Schadenserkennung an Maschinen .....</b>	<b>11</b>
3.1	Möglichkeiten des Monitorings .....	12
3.2	Unwucht rotierender Elemente .....	12
3.3	Fluchtungsfehler .....	12
3.4	Gleitlager .....	12
3.5	Zahnräder .....	12
3.6	Mechanische Loslösungen .....	13
3.7	Riementrieb .....	13
3.8	Wälzlager .....	13
3.9	Wellen .....	14



# Kapitel 1

## Signalanalyse im Zeitbereich

Effektivwert, quadratischer Mittelwert, RMS-Wert

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.1)$$

Mittelwert der Leistung

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.2)$$

Arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.3)$$

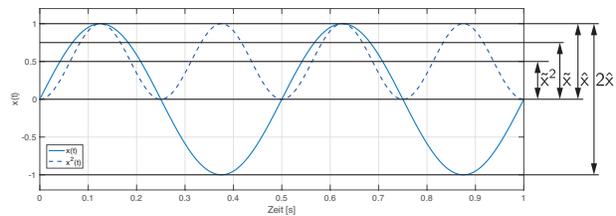


Abb. 1.1 Amplitude, Effektivwert und Mittelwert der Leistung einer harmonischen Schwingung

Pegelmessgerät, gleitender Effektivwert

$$\bar{x}_r(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_{\xi=0}^t e^{-\frac{(t-\xi)}{\tau}} x^2(\xi) d\xi} \quad (1.4)$$

Slow:  $\tau = 1 \text{ s}$

Fast:  $\tau = 0,125 \text{ s}$

Impuls:  $\tau = 0,035 \text{ s}$  Einschwingen,  $\tau = 1,5 \text{ s}$  Ausschwingen

Vektorielle Addition der drei Raumrichtungen

$$a_w = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.5)$$

Schwingungsbelastung Hand-Arm-Schwingung DIN EN ISO 8041, EN ISO 5349

$$a_{hv} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a_w^2(t) dt} \quad (1.6)$$

Tages-Schwingbelastung achtstündiger Arbeitstag

$$A(8) = \sqrt{\frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^N (a_{hvi}^2 T_i)} \quad (1.7)$$

Modulationsgrad

$$m = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{\bar{x}} 100\% \quad (1.8)$$

Scheitel-Faktor, crest-factor

$$C_F = \frac{|x_{\max}|}{\bar{x}} \quad (1.9)$$

## Autokorrelation

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (1.10)$$

## Kreuzkorrelation

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (1.11)$$

## 1/n-Oktav-Bandpassfilter

$f_0$  der Mittenfrequenz des Bandpassfilters

$f_1$  der unteren Grenzfrequenz des Bandpassfilters

$f_2$  der oberen Grenzfrequenz des Bandpassfilters

## Oktav-Bandpassfilter

$$f_1 = \frac{f_2}{2} \quad (1.12)$$

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad (1.13)$$

## 1/n-Oktav-Bandpassfilter

$$f_1 = \frac{f_2}{\sqrt[n]{2}} \quad (1.14)$$

$$f_0 = \sqrt[n]{f_1 \cdot f_2} = f_1 \cdot \sqrt[n]{2} \quad (1.15)$$

## Amplitudendichte, Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.16)$$

Mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt \quad (1.17)$$

## Kapitel 2

# Signalanalyse im Frequenzbereich

Fouriertransformation, Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (2.1)$$

Bandbegrenzung

$$f_{\max} = \frac{N}{2} \Delta f \quad (2.2)$$

Parsevalsches Theorem

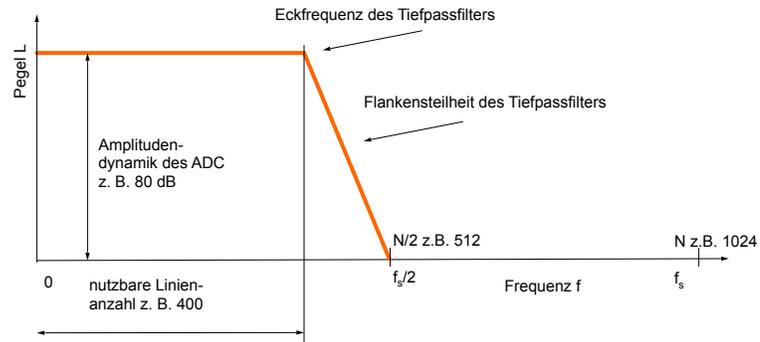
$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x(k))^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\underline{X}(n)|^2 \quad (2.3)$$

Blocklänge

$$T = N \cdot \Delta t = \frac{N}{f_s} \quad (2.4)$$

Abtastfrequenz

$$f_s = N \cdot \Delta f \quad (2.5)$$



**Abb. 2.1** Einfluss der Tiefpassfilterung auf Höchstfrequenz und Linienzahl

Höchstfrequenz

$$f_{\max} < \frac{f_s}{2} = \frac{N}{2} \cdot \Delta f \quad (2.6)$$

Frequenzauflösung, Linienbreite

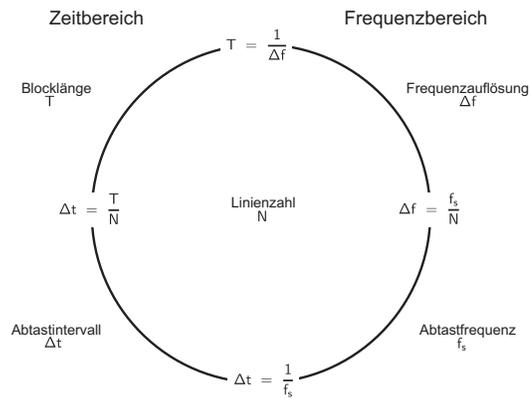
$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T} \quad (2.7)$$

Abtastintervall

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N} \quad (2.8)$$

Unschärferelation (Grundgesetz der Nachrichtentechnik)

$$T \cdot \Delta f = 1 \quad (2.9)$$



**Abb. 2.2** Zusammenhang zwischen FT-Parametern

### Hanning-Fensterfunktion

$$w(n) = 0,5 \cdot \left[ 1 - \cos \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{N} \right) \right] = \cos^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{N} \right) \quad (2.10)$$

### Hamming-Fensterfunktion

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{N} \right) \quad (2.11)$$

### Flatop-Fensterfunktion

$$w(n) = a_0 - a_1 \cdot \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) + a_2 \cdot \cos \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) - a_3 \cdot \cos \left( \frac{6 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) + a_4 \cdot \cos \left( \frac{8 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) \quad (2.12)$$

$$a_0 = 0,21557895$$

$$a_1 = 0,41663158$$

$$a_2 = 0,277263158$$

$$a_3 = 0,083578947$$

$$a_4 = 0,006947368$$

### Blackman-Fensterfunktion

$$w(n) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) + 0,08 \cdot \cos \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1} \right) \quad (2.13)$$

## Kaiser-Fensterfunktion

$$w(n) = \frac{I_0 \cdot \left[ \beta \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{n-N/2}{N/2} \right)^2} \right]}{I_0(\beta)} \quad (2.14)$$

$I_0$  modifizierte Bessel-Funktion 0.-Ordnung

$\beta = 0.1102 \cdot (\alpha - 8.7)$  für  $\alpha > 50$

$\beta = 0.5842 \cdot (\alpha - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (\alpha - 21)$  für  $50 \geq \alpha \geq 21$

$\beta = 0$  für  $\alpha < 21$

## Fenstermittelwert, Amplitudenkorrektur, Schmalbandkorrektur

$$\text{FM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w(k) \quad (2.15)$$

## Leistungsmittelwert

$$\text{PM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k) \quad (2.16)$$

## Effektive Bandbreite

$$B_{\text{eff}} = \frac{\text{PM}}{T \cdot \text{FM}^2} \quad (2.17)$$

## Relative Standardabweichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{B_{\text{eff}} T_A}} \quad (2.18)$$

Der Einfluss der Fensterfunktionen auf die Spektren ist in den Gleichungen nicht berücksichtigt (allgemein in der Literatur übliche Darstellungsweise).

Amplitudenspektrum, Betragsspektrum, MAG

$$\text{MAG} = \underline{X}(f) = |\underline{X}(f)| \quad (2.19)$$

der Formelbuchstabe ist in der Literatur undefiniert, jedoch eigentlich

$$\text{MAG} = \frac{|\underline{X}(f)|}{\text{FM}} \quad (2.20)$$

Leistungsspektrum, PWR

$$P(f) = \left( \frac{|\underline{X}(f)|}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (2.21)$$

Spektrale Leistungsdichte, Autoleistungsspektrum, Autospektrum, Autospektraldichte, Power Spectral Density, PSD

$$G_{xx}(f) = \frac{P(f)}{B_{\text{eff}}} \quad (2.22)$$

Spektrale Energiedichte, Energiedichtespektrum (ESD)

$$E(f) = |\underline{X}(f)|^2 = \frac{P(f)}{B_{\text{eff}}} \cdot T \quad (2.23)$$

Autopowerspektrum (mit sich selbst korreliertes Spektrum), APS, Autoleistungsspektrum

$$S_{XX}(f) = \underline{X}(f) \cdot \underline{X}(f)^* = E(f) = \text{MAG}^2 \quad (2.24)$$

Kreuzleistungsspektrum

$$\underline{S}_{XY}(f) = \underline{Y}(f) \cdot \underline{X}(f)^* \quad (2.25)$$

Mittlere Signalamplitude aus Spektrum

$$\bar{x} = \sqrt{\sum (|\underline{X}(f)|)^2} = \sqrt{\sum E(f)} \quad (2.26)$$

Effektivwert des Zeitsignals aus Spektrum

$$\bar{x} = \sqrt{\sum \left( \frac{|\underline{X}(f)|}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\sum P(f)} \quad (2.27)$$

Übertragungsfunktion, H, frf, FRF (in der Literatur  $H(j\omega)$ )

$$\underline{H}(f) = \frac{\text{Antwort}}{\text{Anregung}} = \frac{\underline{Y}(f)}{\underline{X}(f)} = \frac{\underline{A}(f)}{\underline{E}(f)} \quad (2.28)$$

Betragswert der Übertragungsfunktion (in der Literatur  $H(\omega)$ )

$$H(f) = |\underline{H}(f)| = \left| \frac{\underline{A}(f)}{\underline{E}(f)} \right| = \frac{|\underline{A}(f)|}{|\underline{E}(f)|} \quad (2.29)$$

Übertragungsfunktion  $H_1$ , verwenden für Störung (Rauschen) am Antwortsignal

$$\underline{H}_1(f) = \frac{\underline{A}(f) \cdot \underline{E}^*(f)}{\underline{E}(f) \cdot \underline{E}^*(f)} \quad (2.30)$$

Übertragungsfunktion  $H_2$ , verwenden für Störung (Rauschen) am Anregungssignal

$$\underline{H}_2(f) = \frac{\underline{A}(f) \cdot \underline{A}^*(f)}{\underline{E}(f) \cdot \underline{A}^*(f)} \quad (2.31)$$

Kohärenzfunktion, Kohärenzspektrum, Kohärenz

$$\gamma^2(f) = \frac{|\underline{S}_{YX}(f)|^2}{S_{XX}(f) \cdot S_{YY}(f)} = \frac{|\underline{X}(f) \cdot \underline{Y}^*(f)|^2}{\underline{X}(f) \cdot \underline{X}^*(f) \cdot \underline{Y}(f) \cdot \underline{Y}^*(f)} \quad (2.32)$$

## Kapitel 3

# Schadenserkennung an Maschinen

### 3.1 Definition Ordnung (ORD)

Als Ordnungen (ORD) werden die Vielfachen einer Drehfrequenz z. B. einer Wellenfrequenz verstanden.

Die Verwendung von Ordnungsnummern in der Kommunikation löst die Problematik, dass bei unterschiedlichen Wellendrehzahlen der gleiche Defekt bei ebenso unterschiedlichen Frequenzen zu beobachten ist. Für die Signalanalyse an rotierenden Systemen wie Antriebe, Wellen und Getriebe, deren konstruktive Gestaltung einen multiplikativen Zusammenhang aufweisen, eignet sich die Signalanalyse im Ordnungsbereich besser als jene im Frequenzbereich.

Bei einem 4 Zylinder 4 Takt Verbrennungsmotor ist beispielsweise die hörbare Frequenz des Verbrennungstaktes, die doppelte Drehfrequenz der Kurbelwelle, welche als 2. Motorordnung  $ORD_{Motor} = 2$  bezeichnet wird. Da ein 4-Zylinder 4-Takt-Verbrennungsmotor 2 Verbrennungstakte je Umdrehung aufweist, ist der Multiplikator zur Motordrehzahl = 2. Je nach gerade betrachtetem Betriebspunkt ist dies eine andere (Dreh)Frequenz  $f_{ORD,2}$ . Bei einem einstufigen Getriebe bestehend aus einer Eingangswelle mit einem Zahnrad und Zähnezahl  $Z_1 = 15$  und einer Ausgangswelle mit einem weiteren Zahnrad und Zähnezahl  $Z_2 = 7$  beträgt der Multiplikator für den Zahneingriff (Verzahnungsordnung)  $ORD_Z = 15$ .

### 3.2 Möglichkeiten des Monitorings

- Erfassung von Lastdaten und Temperaturen
- Pegelmessung
- Schwingstärke nach DIN/ISO 20816-1:2016 (und weitere)  
Effektivwert der Schwinggeschwindigkeit mindestens zwischen 10 Hz bis 500 Hz  
Es ist zu prüfen ob 10 Hz als untere und 500 Hz als obere grenze ausreichend ist, empfohlen wird Betrachtung bis zur 3. relevanten Ordnung
- Reduzierung spektraler Merkmale auf Einzahlenwert z. B. Amplitudenwert einer Verzahnungsordnung

### 3.3 Unwucht rotierender Elemente

1. Ordnung der Rotationsfrequenz des Elements in radialer Wirkrichtung

### 3.4 Fluchtungsfehler

- 1., oft 2., 3. und 4. Ordnung des Elements in radialer und axialer Richtung

### 3.5 Gleitlager

- Ölfilmwirbel  
0,42 bis 0,48. Ordnung (lt. Literatur)
- Beginnender Lagerschaden über Lagerverlustleistung und Lagertemperatur ermittelbar
- Lagerschaden: Erhöhung Schwingstärke
- Bei Schaden an einem Wellenpunkt: 1. Wellenordnung
- Lagerschalen lose: 0,5. und 0,25. Wellenordnung

### 3.6 Zahnräder

- Anstieg in 1. Verzahnungsordnung
- Erkennen 2. und 3. Verzahnungsordnung

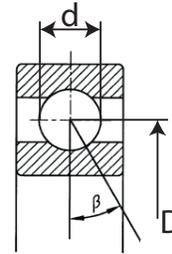
### 3.7 Mechanische Loslösungen

2. Ordnung

### 3.8 Riementrieb

- 1., 2., 3. und 4. Ordnung des Antriebs
- 1., 2., 3. und 4. Ordnung des Abtriebs
- 1., 2., 3. und 4. Ordnung des Riemens

### 3.9 Wälzlager



**Abb. 3.1** Relevante Größen am Wälzlager für die Bestimmung der Schadfrequenzen

Rotation des Käfigs

$$f_{K\dot{\lambda}} = \frac{1}{2} \cdot f_n \cdot \left(1 - \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad \text{bzw.} \quad ORD_{K\dot{\lambda}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad (3.1)$$

Überrollen des Außenrings

$$f_A = \frac{1}{2} \cdot f_n \cdot z \cdot \left(1 - \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad \text{bzw.} \quad ORD_A = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad (3.2)$$

Überrollen des Innenrings

$$f_I = \frac{1}{2} \cdot f_n \cdot z \cdot \left(1 + \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad \text{bzw.} \quad ORD_I = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{d}{D} \cdot \cos \beta\right) \quad (3.3)$$

Wälzkörperrotation

$$f_{WA} = \frac{1}{2} \cdot f_n \cdot \frac{D}{d} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \cdot \cos \beta \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad ORD_{WA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{d} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \cdot \cos \beta \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

Überrollen einer Wälzkörperunregelmäßigkeit

$$f_W = f_n \cdot \frac{D}{d} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \cdot \cos \beta \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad ORD_W = \frac{D}{d} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \cdot \cos \beta \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

mit:

$f_{K\ddot{A}}$ ,  $ORD_{K\ddot{A}}$  Frequenz bzw. Ordnungsnummer der Käfigrotation

$f_A$ ,  $ORD_A$  Frequenz bzw. Ordnungsnummer des Überrollens am Außenring

$f_I$ ,  $ORD_I$  Frequenz bzw. Ordnungsnummer des Überrollens am Innenring

$f_{WA}$ ,  $ORD_{WA}$  Frequenz bzw. Ordnungsnummer der Wälzkörperrotation

$f_W$ ,  $ORD_W$  Frequenz bzw. Ordnungsnummer des Überrollens einer Wälzkörperunregelmäßigkeit auf beiden Laufbahnen

$d$  Wälzkörperdurchmesser

$D$  Wälzkörperteilkreisdurchmesser

$\beta$  Lastwinkel, wird i.d.R. durch  $\alpha$  (Druckwinkel) ersetzt

$z$  Anzahl der Wälzkörper

Schäden "kündigen" sich an, wenn zu diesen Frequenzen bzw. Ordnungsnummern Amplituden in den Diagrammen sichtbar werden. Es liegen Schäden vor, wenn auch zu den Vielfachen (z.B.  $2 \cdot f_A$ ,  $3 \cdot f_A$  usw.) in den Frequenz- bzw. Ordnungsdiagrammen Amplituden sichtbar werden.

### 3.10 Wellen

Messung in axialer und radialer Richtung

1. Wellenordnung aus Spektrum

Phasenversatz zwischen den Lagerstellen aus der Übertragungsfunktion

- Statische Unwucht
  1. Wellenordnung an beiden Lagerstellen radial in Phase
- Dynamische Unwucht
  1. Wellenordnung zwischen beiden Lagerstellen radial ca.  $180^\circ$  Phasenversatz
- Axiales Pendeln (hin- und hergehende Bewegung)
  1. Wellenordnung zwischen beiden Lagerstellen radialer Phasenversatz
  1. Wellenordnung zwischen beiden Lagerstellen axialer Phasenversatz
- Wellenbiegung 1. Wellenordnung zwischen beiden Lagerstellen radial in Phase
  1. Wellenordnung zwischen beiden Lagerstellen axialer Phasenversatz

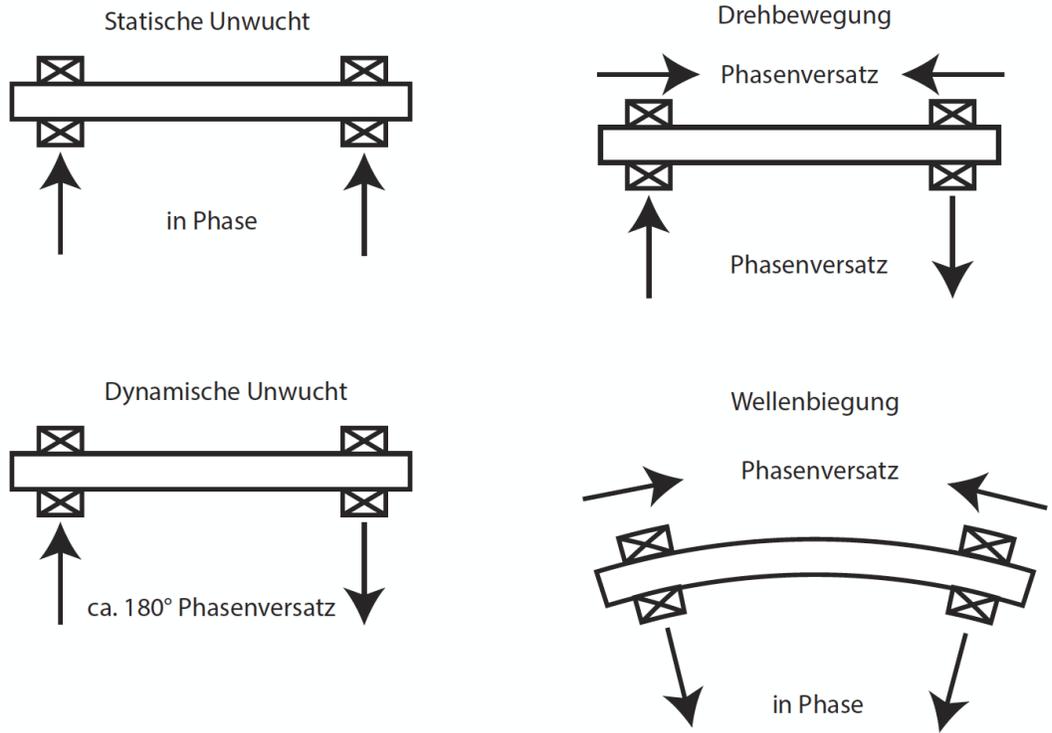


Abb. 3.2 Wellendefekte nach Kolerus, Wassermann

