HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN MÜNCHEN

VTP/MTP exp. Modalanalyse

Annahmen und Begriffserklärungen

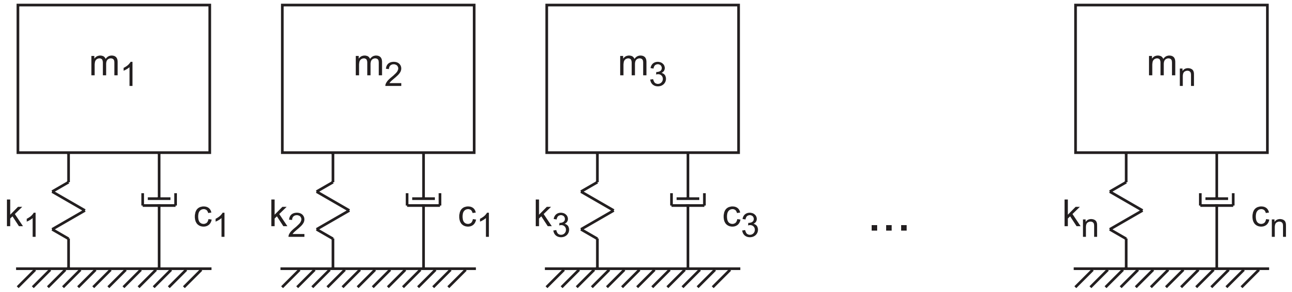
- Eine mechanische Struktur weist i.d.R. mehrere Eigenfrequenzen mit zugehörigen Schwingungsmuster auf. Als Mode (mathematisch Eigenfunktion) wird eine Eigenfrequenz mit ihrem Schwingungsmuster, der Schwingform verstanden. Daraus leitet sich ab, dass es eine Struktur eine 1. Mode, 2. Mode usw. aufweist. Diese Form der Darstellung listet die Moden der Struktur in der Abfolge der Eigenfrequenz auf. Es ist eine Beschreibung üblich, welche das Schwingungsmuster der Mode verbal beschreibt. Der Index r wird für die Moden-Nummer verwendet

Beispiel
1te Torsions-Mode, für eine Mode deren Schwingungsmuster auf Verdrehung entlang der Hauptachse der Struktur mit der niedrigsten (1.) Torsions-Eigenfrequenz hinweist. 2te Biege-Mode, für eine Mode deren Schwingungsmuster auf Biegung der Struktur in der 2. Biege-Eigenfrequenz hinweist.

Annahmen und Begriffserklärungen

Eine der wichtigsten Annahmen für die experimentelle Modalanalyse ist die Orthogonalität der Eigenfunktionen und damit die Unabhängigkeit der Moden voneinander. Für jede Mode wird ein eigenes abgeschlossenes System in Form des in Abschnitt 5 beschriebenen Einmassenschwingsystems bestehend aus der Masse m, der Federsteifigkeit k und der Dämpfungskoeffizient c, mit einem Freiheitsgrad angenommen (Abbildung 16.1). Das bedeutet für die Grenzen des jeweiligen System, dass diese entweder ideal freie oder absolut starre Ränder aufweisen. Dies ist in der realen Anwendung jedoch nicht gegeben. In der Praxis ist diese Annahme dann verwendbar, wenn in über die ermittelten Übertragungsfunktionen die Eigenfrequenzen bestimmbar sind.

Das Einmassenschwingsystem wird auch als Einmassenschwinger oder SDOF (Single Degree Of Freedom) System bezeichnet.



Annahmen und Begriffserklärungen

Eine weitere sehr wichtige Annahme ist, dass es sich um lineare zeitinvariante Systeme handelt. Ist dies nicht der Fall, so ist die Analyse soweit zu begrenzen dass diese Annahme erfüllt wird. Zum Beispiel durch Reduzierung des betrachteten Frequenzbereichs bzw. Kürzung der Messzeit auf ein Zeitintervall in dem sich die Bedingung der Zeitinvarianz erfüllen lässt.

Es wird vom Prinzip der Superposition ausgegangen. Das bedeutet, dass die Antwort des Systems auf gleichzeitige Anregung mit mehreren Signalen identisch zu der Summe der Systemantworten auf die einzelnen Anregungssignale ist.

Es liegt Reziprozität vor. Damit kann der Ort der Anregung mit dem Ort der Antwort vertauscht werden. Dies ist für die Durchführung der experimentellen Modalanalyse eine sehr wichtige und zu überprüfende Annahme, da der Ortstausch zwischen Anregung und Antwort sehr oft durchgeführt wird. Orte der Anregung werden mit dem Index n versehen, Orte der Antwort mit dem Index m.

Es liegt Kausalität vor. Demnach gibt es keine Systemantwort ohne eine Systemanregung. Daher ist bei den erforderlichen Messungen zu berücksichtigen, dass die Systemantwort und die Systemanregung gesamthaft erfasst wird.

Das System ist stabil. Wird die Systemanregung beendet, klingen die Schwingungen des Systems ab. Das Abklingverhalten wird durch die Dämpfung des Systems bestimmt.

Grundlagen der Modalanalyse

Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung des Einmassenschwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

in Matrizzenschreibweise

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

Benötigt werden Übertragungsfunktionen

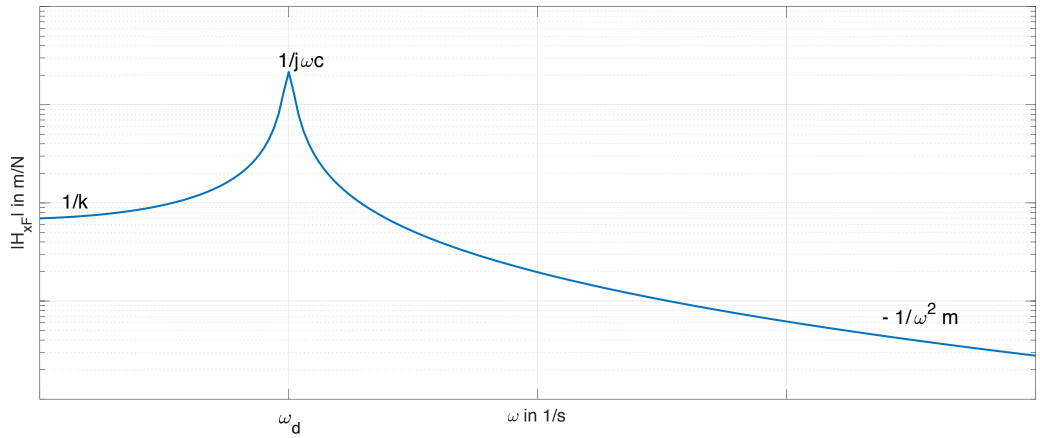
$$\underline{H}_{xF}(\omega) = \frac{\underline{\hat{X}}(\omega)}{\underline{\hat{F}}(\omega)} = \frac{\underline{H}_{vF}(\omega)}{j\omega} = \frac{\underline{H}_{aF}(\omega)}{(j\omega)^2}$$

Grundlagen der Modalanalyse

In [4] wird die Übertragungsfunktion durch einsetzen der Bewegungsgleichung zu

$$\underline{H}_{xF}(\omega) = \frac{1}{k} + \frac{1}{j\omega c} - \frac{1}{\omega^2 m}$$

Dies beschreibt mathematisch den charakteristischen Verlauf der Übertragungsfunktion des Einmassenschwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung.



Grundlagen der Modalanalyse

Für die Bestimmung der Modalparameter werden die Eigenwerte der Bewegungsgleichung benötigt. Dies wird durch eine Laplace-Transformation erreicht.

Für die unkritische Dämpfung klingt die Auslenkung schwingend exponentiell ab und die Lösung weist konjugiert komplexe Eigenwerte auf.

$$\underline{s} = -\frac{c}{2m} + j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta + j\omega_d$$

$$\underline{s}^* = -\frac{c}{2m} - j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta - j\omega_d$$

Grundlagen der Modalanalyse

Aus

$$\underline{s} = Re\{\underline{s}\} + Im\{\underline{s}\}$$

folgt

$$\delta = -Re\{\underline{s}\} = \frac{c}{2m}$$

$$\omega_d = Im\{\underline{s}\} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Grundlagen der Modalanalyse

Führt man die Lösung der Eigenwerte als Matrizenrechnung durch, so kann jedes einzelne Element der Übertragungsfunktion bestimmt werden.

$$\underline{H}_{xF,mn} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)}$$

mit $\phi_m(r)$ dem Eigenvektor (Auslenkung) im Antwortpunkt und $\phi_n(r)$ dem Eigenvektor (Auslenkung) im Anregungspunkt

Für die Betrachtung der einzelnen Mode r bedeutet dies in mathematischer Schreibweise

$$\underline{H}_{xF,mn} = \frac{\phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)} + \underbrace{\sum_{q=1\ q\neq r}^{N} \frac{\phi_m(q) \cdot \phi_n(q)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(q) + \omega_0^2(r)}}_{B_{mn}}$$

Grundlagen der Modalanalyse

Mit der üblich ermittelten Übertragungsfunktion und den Bedingungen

$$B_{mn} = 0$$

$$\omega = \omega_d(r)$$

gilt dann

$$\underline{H}_{aF,mn} = \frac{\omega_d^2(r) \cdot \phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega_d^2(r) + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)}$$

mit dem Dämpfungsgrad

$$D(r) = \frac{\delta(r)}{\omega_d(r)}$$

und

$$\omega_0^2 = \omega_d^2(r) + \delta^2(r)$$

Grundlagen der Modalanalyse

wird die Übertragungsfunktion zu

$$|\underline{H}_{aF}(\omega_d(r))| = \frac{\phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{\sqrt{D^4(r) + 4D^2(r)}}$$

Zur Bestimmung der Auslenkungen ist eine Messung erforderlich in der, der Antwortpunkt m gleich dem Anregungspunkt n ist. Diese Messung wird als Anregungs-Antwortpunkt-Messung (engl. Driving-Point-Measure) bezeichnet. In diesem Fall wird die Übertragungsfunktion zu

$$|\underline{H}_{aF}(\omega_d(r))| = \frac{\phi_n(r)^2}{\sqrt{D^4(r) + 4D^2(r)}}$$

Grundlagen der Modalanalyse

Damit können nun die Auslenkungen bestimmt werden.

Auslenkung im Anregungspunkt n mit m=n:

$$\phi_n(r) = \sqrt{|\underline{H}_{aF,mn}(\omega_d(r))| \cdot \sqrt{D^4(r) + 4D^2(r)}}$$

Auslenkung im Antwortpunkt m:

$$\phi_m(r) = \sqrt{D^4(r) + 4D^2(r)} \cdot \frac{|\underline{H}_{aF,mn}(\omega_d(r))|}{\phi_n(r)}$$

Grundlagen der Modalanalyse

Um die Schwingformen der Moden r einer Struktur zu ermitteln werden benötigt:

- die Amplituden aus den Übertragungsfunktionen $|\underline{H}_{aF,mn}(\omega_d(r))|$ bei $\omega = \omega_d(r)$ für den Anregungs-Antwortpunkt m=n, um daraus die Auslenkung des Anregungspunktes ϕ_n zu bestimmen
- die Amplituden aus den Übertragungsfunktionen $|\underline{H}_{aF,mn}(\omega_d(r))|$ bei $\omega = \omega_d(r)$ für alle Antwortmesspunkte $m \neq n$, um daraus die Auslenkungen der Antwortpunkte ϕ_m zu bestimmen
- den Bereich um $\omega_d(r)$ der Übertragungsfunktionen $|\underline{H}_{xF,mn}(\omega_d(r))|$, um daraus die Dämpfung $D(r)$ und die genaue Resonanzkreisfrequenz $\omega_d(r)$ bzw. alternativ die Resonanzfrequenz $f_d(r)$ zu bestimmen.
- das Vorzeichen des Imaginärteils der Polstelle S, um daraus die Richtung der Auslenkung zu bestimmen.

MATLAB-Funktionen

```
[frf, f, coh] = modalfrf(anregung, antwort, fs, blocksize, noverlap)

[fn, dn] = modalfit(frf,f,fs,10,'FitMethod','lsce', 'FreqRange',[0 5000], 'PhysFreq', frequenzen)

modalsd(frf,f,fs, 'FreqRange', [0 250])
```

Literatur

1. D. J. Ewins: Modal Testing: Theory, Practice and Application. Baldock: Research Studies Press, 2. Auflage 2003, ISBN 0863802184
2. Hans Günther Natke: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse - Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme. 2. Auflage 1988, 3. Auflage 1992, ISBN 3528181451
3. STRUCTURAL TESTING Part I: Mechanical Mobility Measurements, by Ole Døssing, Brüel & Kjær 2850 Nærum Denmark, Revision April 1988
4. STRUCTURAL TESTING Part II: Modal Analysis and Simulation by Ole Døssing, Brüel & Kjær 2850 Nærum Denmark, March 1988
5. Anders Brandt, Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011
6. Experimentelle Modalanalyse und aktive Schwingungsdämpfung eines biegeelastischen Rotors, Dissertation, Daniel Strohschein, 2011, ISBN 978-3-89958-561-2
7. Judith Kokavecz, Messtechnik der Akustik, Kapitel 8, Modalanalyse, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010, ISBN 978-3-540-68086-4
8. Generalized Prony Method, Dissertation zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades Doctor rerum naturalium der Georg-August-Universität Göttingen, vorgelegt von Thomas Peter aus Rostock ,Göttingen 2013
9. Kuttner, Rohnen, Praxis der Schwingungsmessung, Springer-Verlag 2019

Dipl.-Ing. Armin Rohnen LbA - rohnen@hm.edu