

Hochschule  
München  
University of  
Applied Sciences

FK03  
Labor für Schwingungstechnik  
und Maschinendynamik

# VTP/MTP exp. Modalanalyse

## Grundlagen und Praktikumsversuch

25.06.2024 Dipl.-Ing. Armin Rohnen LfbA



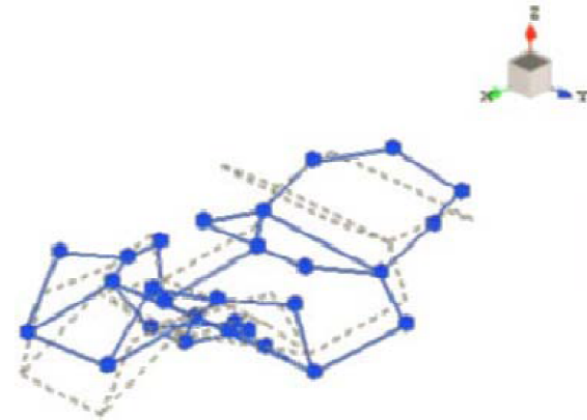
# MTP / VTP experimentelle Modalanalyse

Das Praktikum findet im  
Labor für Maschinendynamik  
in Raum B0273 statt

LRB: Montags 15:15 Uhr

MBB: Dienstags 14:30 Uhr

FAB: Mittwochs 15:15 Uhr



Diese Präsentation dient der Vorbereitung auf das Praktikum.

Zur Vertiefung der Thematik dient das Kapitel 15 „Experimentelle Modalanalyse“ aus dem Fachbuch Praxis der Schwingungsmessung.

Für das bessere Verständnis wird empfohlen zuvor das MTP/VTP Schwingungsanalyse zu belegen.

Im wesentlichen werden aus fouriertransformierten Messdaten Übertragungsfunktionen berechnet, deren Ergebnisse bewertet und weiterverrechnet werden. Die Studierenden sollen die Zielkonflikte dieser Vorgehensweise kennen lernen.

In diesem Praktikum werden Impulshammermessungen durchgeführt und aus den Übertragungsfunktionen die Steifigkeiten von Bauteilen ermittelt.

## MTP / VTP experimentelle Modalanalyse - Ablauf

- selbständige Vorbereitung der Studierenden anhand der zur Verfügung gestellten Unterlagen und der Fachliteratur
- Sicherheitsunterweisung und Eingangsprüfung (30% Notenanteil)
- ca. 210 Min Erläuterungen und Versuchsdurchführungen
- Bericht
- Angabefrist: 3 Wochen nach Termin

# Formelzeichen

$c$ , Dämpfungskonstante

$C$ , Dämpfungskonstante in Matrizzenschreibweise

$\delta$ , Dämpfung

$D$ , Dämpfungsgrad

$F$ , Kraft

$f$ , Frequenz

$\underline{H}_{x_F}$ , Übertragungsfunktion mit Kraft als Anregung und Schwingweg als Antwort

$\underline{H}_{v_F}$ , Übertragungsfunktion mit Kraft als Anregung und Schwinggeschwindigkeit als Antwort

$\underline{H}_{a_F}$ , Übertragungsfunktion mit Kraft als Anregung und Beschleunigung als Antwort

$Im$ , imaginär Anteil

$k$ , Stetigkeit, Federsteifigkeit, Federkonstante

$K$ , Federkonstante in Matrizzenschreibweise

$m$ , Masse, modale Masse, an der Schwingung beteiligte Masse

$M$ , Masse in Matrizzenschreibweise

$Re$ , Realanteil

$\omega$ , Kreisfrequenz

$\omega_0$ , Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$\omega_d$ , Eigenkreisfrequenz des geschwindigkeitsproportional gedämpften Systems

# Formelzeichen

$\underline{s}$ , Polstelle, komplex

$\underline{s}^*$ , konjugiert komplexe Polstelle

$x$ , Schwingweg

$\dot{x}$ , Schwinggeschwindigkeit, Schnelle

$\ddot{x}$ , Beschleunigung

# Annahmen und Begriffserklärung

- Eine mechanische Struktur weist i.d.R. mehrere Eigenfrequenzen mit zugehörigen Schwingungsmuster auf. Als Mode (mathematisch Eigenfunktion ) wird eine Eigenfrequenz mit ihrem Schwingungsmuster, der Schwingform verstanden. Daraus leitet sich ab, dass es eine Struktur eine 1. Mode, 2. Mode usw. aufweist. Diese Form der Darstellung listet die Moden der Struktur in der Abfolge der Eigenfrequenz auf. Es ist eine Beschreibung üblich, welche das Schwingungsmuster der Mode verbal beschreibt. Der Index  $r$  wird für die Moden-Nummer verwendet

---

## Beispiel

---

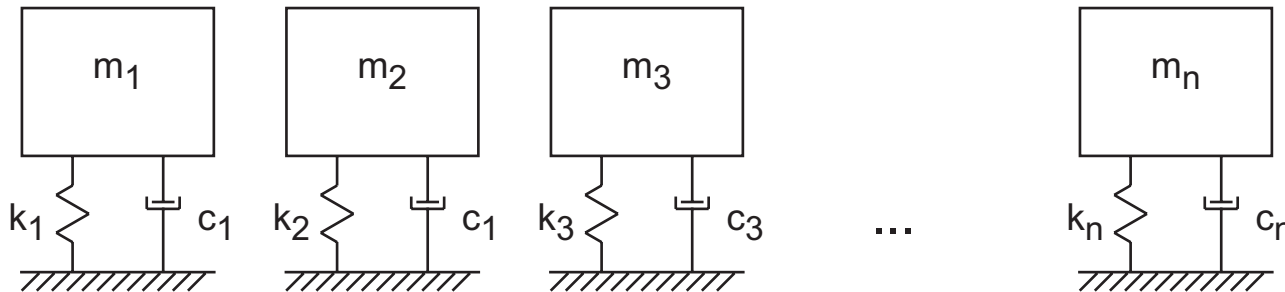
1te Torsions-Mode, für eine Mode deren Schwingungsmuster auf Verdrehung entlang der Hauptachse der Struktur mit der niedrigsten (1.) Torsions-Eigenfrequenz hinweist.

2te Biege-Mode, für eine Mode deren Schwingungsmuster auf Biegung der Struktur in der 2. Biege-Eigenfrequenz hinweist.

# Annahmen und Begriffserklärung

Eine der wichtigsten Annahmen für die experimentelle Modalanalyse ist die Orthogonalität der Eigenfunktionen und damit die Unabhängigkeit der Moden voneinander. Für jede Mode wird ein eigenes abgeschlossenes System in Form des in Abschnitt 5 beschriebenen Einmassenschwingsystems bestehend aus der Masse  $m$ , der Federsteifigkeit  $k$  und der Dämpfungskoeffizient  $c$ , mit einem Freiheitsgrad angenommen (Abbildung 16.1). Das bedeutet für die Grenzen des jeweiligen System, dass diese entweder ideal freie oder absolut starre Ränder aufweisen. Dies ist in der realen Anwendung jedoch nicht gegeben. In der Praxis ist diese Annahme dann verwendbar, wenn in über die ermittelten Übertragungsfunktionen die Eigenfrequenzen bestimmbar sind.

Das Einmassenschwingsystem wird auch als Einmassenschwinger oder SDOF (Single Degree Of Freedom) System bezeichnet.



# Annahmen und Begriffserklärung

Eine weitere sehr wichtige Annahme ist, dass es sich um lineare zeitinvariante Systeme handelt. Ist dies nicht der Fall, so ist die Analyse soweit zu begrenzen dass diese Annahme erfüllt wird. Zum Beispiel durch Reduzierung des betrachteten Frequenzbereichs bzw. Kürzung der Messzeit auf ein Zeitintervall in dem sich die Bedingung der Zeitinvarianz erfüllen lässt.

Es wird vom Prinzip der Superposition ausgegangen. Das bedeutet, dass die Antwort des Systems auf gleichzeitige Anregung mit mehreren Signalen identisch zu der Summe der Systemantworten auf die einzelnen Anregungssignale ist.

Es liegt Reziprozität vor. Damit kann der Ort der Anregung mit dem Ort der Antwort vertauscht werden. Dies ist für die Durchführung der experimentellen Modalanalyse eine sehr wichtige und zu überprüfende Annahme, da der Ortstausch zwischen Anregung und Antwort sehr oft durchgeführt wird. Orte der Anregung werden mit dem Index  $n$  versehen, Orte der Antwort mit dem Index  $m$ .

Es liegt Kausalität vor. Demnach gibt es keine Systemantwort ohne eine Systemanregung. Daher ist bei den erforderlichen Messungen zu berücksichtigen, dass die Systemantwort und die Systemanregung gesamthaft erfasst wird.

Das System ist stabil. Wird die Systemanregung beendet, klingen die Schwingungen des Systems ab. Das Abklingverhalten wird durch die Dämpfung des Systems bestimmt.



# Grundlagen der Modalanalyse

Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung des Einmassenschwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

in Matrizzenschreibweise

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

Benötigt werden Übertragungsfunktionen

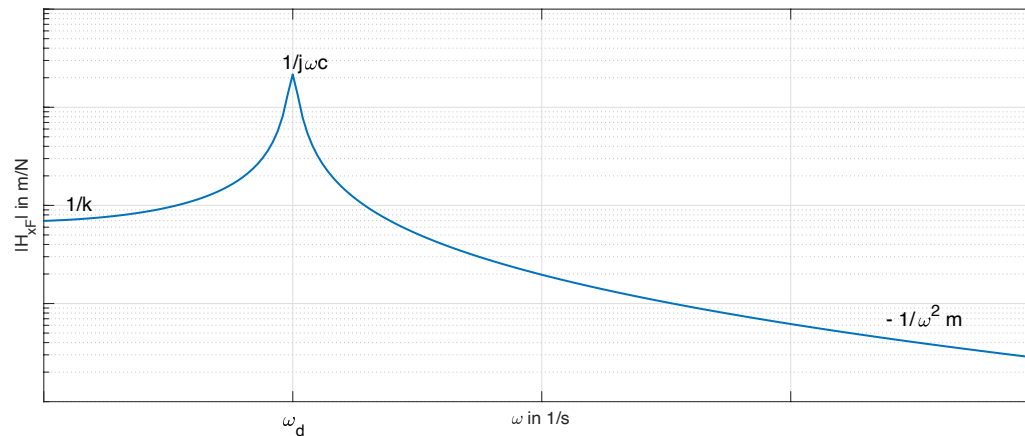
$$\underline{H}_{xF}(\omega) = \frac{\underline{\hat{X}}(\omega)}{\underline{\hat{F}}(\omega)} = \frac{\underline{H}_{vF}(\omega)}{j\omega} = \frac{\underline{H}_{aF}(\omega)}{(j\omega)^2}$$

# Grundlagen der Modalanalyse

In [4] wird die Übertragungsfunktion durch einsetzen der Bewegungsgleichung zu

$$\underline{H}_{xF}(\omega) = \frac{1}{k} + \frac{1}{j\omega c} - \frac{1}{\omega^2 m}$$

Dies beschreibt mathematisch den charakteristischen Verlauf der Übertragungsfunktion des Einmassenschwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung.



# Grundlagen der Modalanalyse

Für die Bestimmung der Modalparameter werden die Eigenwerte der Bewegungsgleichung benötigt. Dies wird durch eine Laplace-Transformation erreicht.

Für die unkritische Dämpfung klingt die Auslenkung schwingend exponentiell ab und die Lösung weist konjugiert komplexe Eigenwerte auf.

$$\underline{s} = -\frac{c}{2m} + j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta + j\omega_d$$

$$\underline{s}^* = -\frac{c}{2m} - j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta - j\omega_d$$

# Grundlagen der Modalanalyse

Aus

$$\underline{s} = \operatorname{Re}\{\underline{s}\} + \operatorname{Im}\{\underline{s}\}$$

folgt

$$\delta = -\operatorname{Re}\{\underline{s}\} = \frac{c}{2m}$$

$$\omega_d = \operatorname{Im}\{\underline{s}\} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

# Grundlagen der Modalanalyse

Führt man die Lösung der Eigenwerte als Matrizenrechnung durch, so kann jedes einzelne Element der Übertragungsfunktion bestimmt werden.

$$\underline{H}_{xF,mn} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)}$$

mit  $\phi_m(r)$  dem Eigenvektor (Auslenkung) im Antwortpunkt und  $\phi_n(r)$  dem Eigenvektor (Auslenkung) im Anregungspunkt

Für die Betrachtung der einzelnen Mode  $r$  bedeutet dies in mathematischer Schreibweise

$$\underline{H}_{xF,mn} = \frac{\phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)} + \underbrace{\sum_{q=1, q \neq r}^N \frac{\phi_m(q) \cdot \phi_n(q)}{-\omega^2 + j\omega 2\delta(q) + \omega_0^2(q)}}_{B_{mn}}$$

# Grundlagen der Modalanalyse

Mit der üblich ermittelten Übertragungsfunktion und den Bedingungen

$$B_{mn} = 0$$

$$\omega = \omega_d(r)$$

gilt dann

$$\underline{H}_{aF,mn} = \frac{\omega_d^2(r) \cdot \phi_m(r) \cdot \phi_n(r)}{-\omega_d^2(r) + j\omega 2\delta(r) + \omega_0^2(r)}$$

mit dem Dämpfungsgrad

$$D(r) = \frac{\delta(r)}{\omega_d(r)}$$

und

$$\omega_0^2 = \omega_d^2(r) + \delta^2(r)$$

Das System wird dadurch lösbar und die Schwingformen können bestimmt werden.

# MATLAB®-Funktionen

Für die Auswertung der VTP/MTP Versuchsdaten werden die MATLAB®-Funktionen

```
[frf, f, coh] = modalfrf(anregung, antwort, fs, blocksize, noverlap)
```

```
[fn, dn] = modalfit(frf,f,fs,10,'FitMethod','pp', 'FreqRange',[0 200])
```

benötigt. Erstere jedoch nur dann, wenn die Übertragungsfunktion(en) nicht aus der Impulshammermessung verwendet werden.

# Aufgabenstellung im VTP/MTP exp. Modalanalyse

Es sollen die Steifigkeiten (Federsteifigkeiten) von Bauteilen ermittelt werden. Dazu werden Impulshammermessungen durchgeführt mit denen die eingeleitete Kraft (Hammerschlag) und die Beschleunigungsantwort erfasst werden.

Für die Durchführung der Impulshammermessungen steht eine MATLAB®-APP zur Verfügung, welche die erfassten Rohdaten sowie die ermittelten Übertragungsfunktionen  $\underline{H}_{xF}$  als Datensätze ablegt. Die Datensätze stehen zum Download zur Verfügung.

Die Federrate des Bauteils kann aus der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems über

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

bestimmt werden. Aus der Übertragungsfunktion  $|\underline{H}_{xF}|$ , Ergebnis aus der MATLAB®-Anweisung modalfrf (ist im Datensatz abgelegt), lässt sich der Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega_d} \quad (2)$$

und die genaue Eigenkreisfrequenz des geschwindigkeitsproportional gedämpften Systems ermitteln. Dazu wird die MATLAB®Funktion modalfit verwendet.

Über

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} \quad (3)$$

besteht der Zusammenhang zur Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems.



# Aufgabenstellung im VTP/MTP exp. Modalanalyse

Über die Eingrenzung des Frequenzbereichs in der MATLAB®-Anweisung modalfit wird die Güte der Approximation und damit die Qualität des numerischen Ergebnisses beeinflusst. Zu berücksichtigen ist, dass das Ergebnis aus der MATLAB®-Anweisung eine Frequenz  $f$  und nicht eine Kreisfrequenz  $\omega$  ist.

Zur Ermittlung der Federrate wird die, an der Schwingung beteiligte Masse, die modale Masse, benötigt. Aus der Grundlagenphysik gilt

$$F = m \cdot a \quad (4)$$

Gemessen werden bei den Impulshammerschlägen die einwirkende Kraft  $F$  in  $[N]$  und die Beschleunigungsantwort  $a$  in  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ . Damit lässt sich die Masse aus

$$m = \frac{F}{a} \quad (5)$$

bestimmen.

Operativ werden hierzu die maximalwerte des Kraftimpulses und der Beschleunigungsantwort verwendet. Hierzu sind die Rohdaten der Impulshammerschläge erforderlich. Aufgrund von Messungenauigkeiten, Schlagwinkel und Effekten der Bauteillagerung streuen diese Werte allerdings.

# Lösungsweg: Bestimmung der Blechsteifigkeit $k$

Messdaten ...RAW.mat

$$F = m \cdot a$$

$$m = \frac{F}{a} = \frac{\max(\text{Anregung})}{\max(\text{Antwort})}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow k = \omega_0^2 \cdot m$$

`[fd, D] = modalfit(H, f, fs, OrdNr, 'FitMethod', 'pp', 'FreqRange', [0 x]);`

$$\omega_d = 2 \cdot \pi \cdot f_d$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_d} \longrightarrow \delta = D \cdot \omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}$$

$H$  - Übertragungsfunktion aus Messdaten ...SCHLAG.mat

$f$  - Frequenzachse aus Messdaten ...SCHLAG.mat

$f_s$  - Abtastrate aus Messdaten ...SCHLAG.mat

$OrdNr$  - Ordnungsnummer der Berechnung, Ausprobieren, optimal wenn gerechneter Verlauf nahe am gemessenen Verlauf von  $H$  ist. Dafür `modalfit` aufrufen ohne `[fd, D]` = davor. Dann wird ein Diagramm ausgegeben.

`FreqRange, [0 x]` - Frequenzbereich der Analysiert werden soll

$$\left[ \frac{kg}{s^2} \right] \cdot \left[ \frac{m}{m} \right] = \left[ \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \right] = \left[ \frac{N}{m} \right]$$

# Quellen

1. D. J. Ewins: Modal Testing: Theory, Practice and Application. Baldock: Research Studies Press, 2. Auflage 2003, ISBN 0863802184
2. Hans Günther Natke: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse - Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme. 2. Auflage 1988, 3. Auflage 1992, ISBN 3528181451
3. STRUCTURAL TESTING Part I: Mechanical Mobility Measurements, by Ole Døssing, Brüel & Kjær 2850 Nærum Denmark, Revision April 1988
4. STRUCTURAL TESTING Part II: Modal Analysis and Simulation by Ole Døssing, Brüel & Kjær 2850 Nærum Denmark, March 1988
5. Anders Brandt, Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011
6. Experimentelle Modalanalyse und aktive Schwingungsdämpfung eines biegeelastischen Rotors, Dissertation, Daniel Strohschein, 2011, ISBN 978-3-89958-561-2
7. Judith Kokavec, Messtechnik der Akustik, Kapitel 8, Modalanalyse, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010, ISBN 978-3-540-68086-4
8. Generalized Prony Method, Dissertation zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades Doctor rerum naturalium der Georg-August-Universität Göttingen, vorgelegt von Thomas Peter aus Rostock ,Göttingen 2013
9. Kuttner, Rohnen, Praxis der Schwingungsmessung, Springer-Verlag 2019